Funkcinės lygtys. C lygis

Įvadas

Norint nagrinėti funkcinių lygčių sprendimo temą, reikia prisiminti keletą sąvokų ir teiginių iš mokyklinio matematikos kurso.

Apibrėžimas. Tarkime, X ir Y yra dvi aibės. Funkcija – tai dėsnis (taisyklė), pagal kurią kiekvienam aibės X elementui priskiriamas vienintelis Y aibės elementas.

Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcijos f apibrėžimo sritis simetriška nulio atžvilgiu, t. y. jei $x \in X$, tai ir $-x \in X$. Funkcija, tenkinanti šio apibrėžimo sąlygą $f(-x) = f(x)$, vadinama lygine, o $f(-x) = -f(x)$ – nelygine.

Apibrėžimas. Funkcija f vadinama periodine, jei egzistuoja toks $T \neq 0$, kad su kiekvienu x iš apibrėžimo srities skaičiai $x - T$ ir $x + T$ taip pat priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x + T) = f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos f periodu.

Apibrėžimas. Funkciją f: A → B vadinsime monotonine, jei ji yra arba nedidėjanti, arba nemažėjanti, t. y. arba $f(x) \leq f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$, arba $f(x) \geq f(y)$ su visais $x > y$ $(x, y \in A)$.

Apibrėžimas. Funkcija f: $X \to Y$ vadinama injektyviąja, arba injekcija, jeigu su visais $x_1, x_2 \in X$ ir $y \in Y$. Jei $f(x_1) = y$ ir $f(x_2) = y$, tai išeina, kad $x_1 = x_2$ (jei su visais x_1, x_2 ir $x_1 \neq x_2$ turime $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Apibrėžimas. Funkcija f: $X \to Y$ vadinama surjektyviąja, arba surjekcija, jeigu bet kuriam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Apibrėžimas. Funkcija f: $X \to Y$ vadinama bijektyviąja, arba bijekcija, jeigu ji yra ir injektyvi, ir surjektyvi.

Pagrindiniai funkcinių lygčių sprendimo metodai:

1. Keitimo metodas.
2. Manipuliavimo funkcijos apibrėžimo sritimi metodas.
3. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas.
4. Neapibrėžtų koeficientų metodas.
5. *Koši* funkcinės lygties metodas.

III. Funkcijos pagrindinių savybių – injektyvumo arba surjektyvumo – panaudojimo metodas

Injektyvios funkcijos pavyzdžiai: $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^3$, $f(x) = a/x$, $f(x) = ae^x$, $a \neq 0$. Neinjektyvios funkcijos pavyzdžiai: $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^3 + bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1 pavyzdys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(f(x)) = x$. Įrodykite, kad $f(x)$ yra injekcija.

Sprendimas. Jei $f(a) = f(b)$, tai įrodysime, kad $a = b$. Jei $f(a) = f(b)$, tai ir $f(f(a)) = f(f(b))$. Kadangi $f(f(a)) = a$ ir $f(f(b)) = b$, tai $a = b$.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra injekcija.

2 pavyzdys.

Funkcija f: R → R tenkina lygtį $f(f(x)) = x$. Įrodykite, kad funkcija yra surjekcija.

Sprendimas. Įrodysime, kad kiekvienam skaičiui b egzistuoja toks a, kad $f(a) = b$. Vietoj x įrašę b gauname $f(f(b)) = b$, t. y. funkcija $f(x)$ su tam tikra argumento reikšme įgyja skaičių b.

Atsakymas – funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

3 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, tenkinančias lygtį $f(f(x)) = f(x)$.

Sprendimas. Įrodome, kad funkcija yra injekcija (1 pavyzdys). Kadangi funkcija yra injekcija, tai iš lygybės $f(a) = f(b)$ turime, kad $a = b$ su visais $a, b \in \mathrm{R}$. Lygybėje $f(a) = f(b)$ pakeitę a į $f(x)$, o b į x, gauname $f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) = x$, kai $x \in \mathrm{R}$.

Atsakymas – funkcija $f(x) = x$, kai $x \in \mathrm{R}$.

4 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, tenkinančias lygtį $f(f(x)) = f(x)$.

Sprendimas. Parodome, kad funkcija yra surjekcija (2 pavyzdys). Surjektyvi funkcija įgyja visas funkcijos reikšmių srities reikšmes, taigi, pažymėję $f(x) = y$, turime $f(y) = y$. Vadinasi, $f(x) = x$, kai $x \in \mathrm{R}$.

Atsakymas – funkcija $f(x) = x$, kai $x \in \mathrm{R}$.

5 pavyzdys.

Raskite visas funkcijas $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, tenkinančias lygtį $f(x + f(y)) = f(f(x) + y)$.

Sprendimas. Jei žinotume, kad funkcija yra injekcija, iš karto turėtume $f(x + f(y)) = f(f(x) + y) \Rightarrow x + f(y) = f(x) + y$, o tokią lygtį jau mokėsime spręsti. Užtenka įsistatyti, pavyzdžiui, $y = 0$ ir gauti $f(x) = x + c$, kur c bet koks realusis skaičius. Patikrinę matome, kad ši funkcija $f(x) = x + c$ tenkina lygtį su visomis realiosiomis c reikšmėmis.

Atsakymas – $f(x) = x + c$, kai $c \in \mathrm{R}$.

Uždaviniai

1. Funkcija $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra injekcija.

2. Funkcija $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tenkina lygtį $f(x + f(y)) = f(x) + y$. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra surjekcija.

3. Funkcija $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tenkina lygtį $f(f(x) + x) = x$. Raskite $f(0)$.

4. Funkcijos $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ tenkina lygtį $x + f(x) = f(f(x))$, kai $x \in \mathrm{R}$. Raskite lygties $f(f(x)) = 0$ sprendinius.

5. Funkcijos $f\colon \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$ visiems racionaliesiems x, y tenkina lygtį $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Įrodykite, kad $f(rx) = rf(x)$, kai r – racionalusis skaičius.

Kuriame Lietuvos ateitį
2014–2020 metų Europos Sąjungos fondų investicijų veiksmų programa